

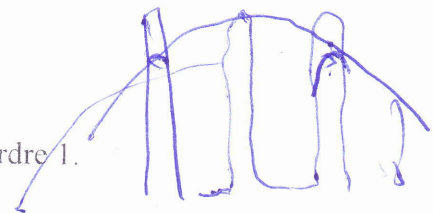
TD N°3 : Optique physique
SMP- (S4)

Exercice 1 : (Diffraction par une ouverture circulaire)

Un écran plat, placé dans le plan XOY, est percé d'un trou circulaire (T) de rayon R et de centre O. Ce trou est éclairé par un faisceau parallèle de lumière monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$, perpendiculaire au plan XOY. On observe la figure de diffraction sur un écran parallèle au plan XOY, placé à $D = 2\text{m}$ de celui-ci.

- 1- Rappeler le principe d'Huygens-Fresnel.
- 2- En déduire l'expression complexe de l'onde $d\bar{E}$ diffractée en un point P, centre d'un élément de surface ds de l'ouverture, dans une direction repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}$. On prendra comme origine des phases la phase de l'onde diffractée en O.
- 3- Montrer que toutes les directions de diffraction, caractérisées par un même angle θ par rapport à l'axe OZ perpendiculaire à XOY, sont identiques.
- 4- Soit $\vec{u}'$ le vecteur unitaire de l'une de ces directions, appartenant au plan XOZ et orienté dans le sens de la lumière diffractée par le trou (T). Établir sous forme d'intégrale, l'expression de l'onde $\bar{E}$ diffractée par le trou dans cette direction.
- 5- En faisant un changement de variable approprié, montrer que E s'exprime par :

$$\bar{E} = \bar{E}(\theta) = E_0 \frac{2B_1(m(\theta))}{m(\theta)}$$



où $B_1(m) = \frac{2m}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cos(mx) dx$ est la fonction de Bessel d'ordre 1.

- 6- Quelles sont les expressions de $m(\theta)$ et E_0 .
 - 7- Déduire l'expression de l'intensité diffractée dans la direction caractérisée par l'angle θ .
 - 8- Sachant que le premier minimum de diffraction est obtenu pour une direction $\theta_1 = 0.5^\circ$, calculer le diamètre d du trou (T).
 - 9- Quel est le diamètre d' de la tache centrale de diffraction.
- N. B. : On rappelle que $B_1(x)$ s'annule pour la première fois pour $x = 3.83$.

Exercice 2 : (Diffraction par les fentes d'Young)

Deux fentes identiques et parallèles F_1 et F_2 de largeur a et de longueur $(\gg a)$ sont disposées dans un même plan (π) perpendiculairement à l'axe $z'Oz$. Les centres O_1 et O_2 des fentes F_1 et F_2 sont distants de d ($d > a$) : O est le milieu de O_1O_2 . Ces fentes reçoivent une onde plane incidente monochromatique de longueur d'onde λ , qui se propage perpendiculairement à leur plan.

- 1- Déterminer l'intensité de l'onde résultante en un point P éloigné du plan (π) dans la direction OP telle que $\angle POz = \theta$ (OP étant contenue dans le plan de la figure).
- 2- Qu'observe-t-on dans un plan (π') contenant le point P et perpendiculaire à $z'Oz$? Qu'advient-il si l'on écarte simultanément les fentes l'une de l'autre dans le plan (π) , O restant le milieu de O_1O_2 ?
- 3- exprimer le rapport d/a pour que la ~~cinquième~~ frange brillante d'interférence disparaisse.

d'ordre 5

Exercice 3 : (Diffraction par un réseau de fentes)

Un réseau optique, placé dans le plan XOY, est composé de $N = 2000$ fentes parallèles à l'axe OY et réparties sur une largeur $l = 1\text{cm}$. Ce réseau est éclairé par un faisceau de lumière blanche (λ compris entre $0.4 \mu\text{m}$ et $0.8 \mu\text{m}$) parallèle à l'axe OZ (perpendiculaire au plan XOY). On observe la figure de diffraction, par le réseau, sur un écran parallèle au plan XOY, placé à une distance $D = 2\text{m}$ de celui-ci.

- 1- Quel est le pas du réseau ?
- 2- En déduire la densité des fentes (nombre de fentes par millimètre).

- 3- Déterminer l'intensité $I(\theta)$ diffractée par le réseau dans une direction définie par l'angle θ par rapport à l'axe OZ.
- 4- En déduire la formule qui détermine la position des taches de diffraction : formule du réseau ($d \sin \theta = k \lambda$). Que représentent les paramètres d et k ?
- 5- Déduire la position x_k de la tache de diffraction d'ordre k , en fonction de d , D et λ .
- 6- Quelle est la position x_0 de la tache centrale (tache d'ordre zéro) de diffraction par le réseau. Cette position dépend-elle de la longueur d'onde ? Conclure.
- 7- Quelle est la position x_{11} de la tache d'ordre 1 pour la longueur d'onde $\lambda_1 = 0.4 \mu\text{m}$?
- 8- Quelle est la position x_{12} de la tache d'ordre 1 pour la longueur d'onde $\lambda_2 = 0.8 \mu\text{m}$?
- 9- Déduire la largeur Δx_1 de la tache d'ordre 1.
- 10- Quel est l'ordre maximum observable pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 0.6 \mu\text{m}$?

N. B. : On rappelle que l'intensité de l'onde diffractée par une fente de largeur a , dans une direction θ est donnée par : $i(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$ avec : $u = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$



Exercice 4 : (Polarisation par réflexion : incidence de Brewster)

Un faisceau de lumière parallèle, polarisée dans le plan d'incidence, tombe sur un dioptré séparant deux milieux d'indices n_1 (milieu d'incidence) et n_2 . On montre que le coefficient de réflexion pour une telle onde, défini par le rapport de l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi à celle du champ

incident, s'exprime par : $r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}$

Où i_1 et i_2 sont respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction.

- 1- Montrer que r s'exprime également par : $r = \frac{\tan(i_2 - i_1)}{\tan(i_2 + i_1)}$
- 2- Déduire que r s'annule pour une valeur particulière de i_1 que l'on déterminera en fonction de i_2 . On notera cette valeur par i_B (angle de Brewster)
- 3- Retrouver la relation qui détermine i_B en fonction des indices des deux milieux.
- 4- Application numérique : calculer i_B pour $n_1 = 1$ (de l'air) et $n_2 = 1.33$ (de l'eau).
- * 5- Quel doit être la direction de polarisation des lunettes polarisantes pour une bonne protection contre les reflets par la surface de l'eau de mer dans une plage ? Justifier votre réponse.
- * 6- Un porteur de lunettes polarisantes, peut-il regarder le soleil directement à travers ces lunettes ? Justifier votre réponse.

Exercice 5 : (Action d'une lame anisotrope sur une lumière polarisée)

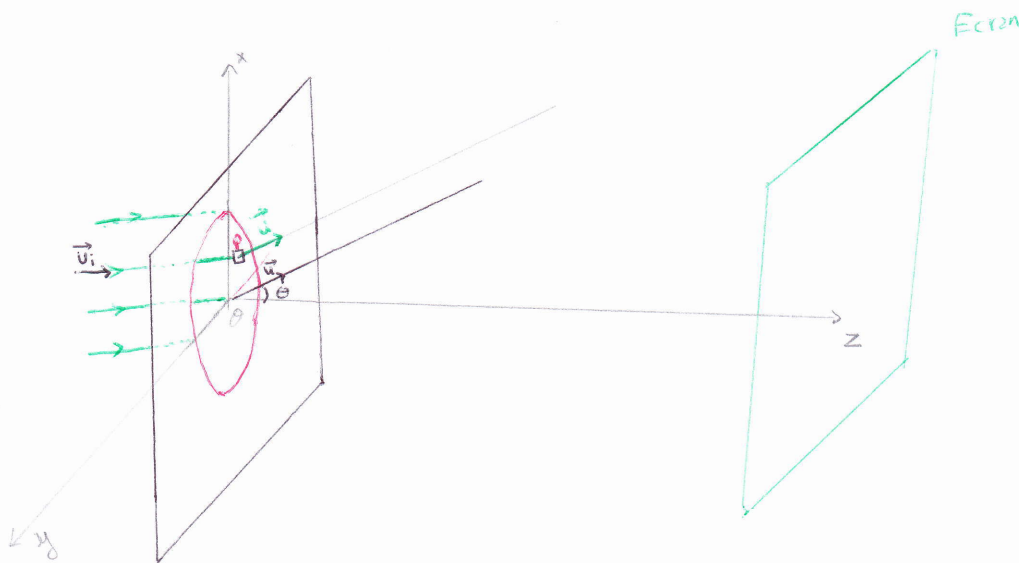
On considère une onde lumineuse monochromatique, qui se propage dans le vide suivant l'axe OX d'un repère orthonormé direct (OXYZ) de vecteurs de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En $x = 0$, le champ électrique de cette onde s'exprime par : $\vec{E} = E_1 \sin \omega t \vec{e}_y + E_2 \cos \omega t \vec{e}_z$, où E_1 et E_2 sont des constantes positives telles que $E_2 > E_1$.

- 1- Etablir l'équation qui traduit la relation entre les composantes E_y et E_z du champ $\vec{E}$.
- 2- Représenter la courbe $E_z = f(E_y)$. En déduire la nature de l'onde considérée.
- 3- Représenter le vecteur champ électrique $\vec{E}(\pi / \omega)$ à l'instant $t = \pi / \omega$.
- 4- Calculer le vecteur vitesse de rotation du champ électrique à l'instant $t = \pi / \omega$ et représenter le sur la même figure (de la question 3). Déduire le sens de rotation du champ électrique.
- 5- S'agit-il d'une lumière polarisée droite ou gauche ? Justifier votre réponse.
- 6- Déterminer le déphasage de E_z par rapport à E_y . En déduire la réponse de la question 5 en la justifiant.

On place dans le trajet de l'onde lumineuse considérée une lame quart d'onde. La face d'entrée (face par laquelle rentre la lumière incidente) de cette lame est située en $x = 0$.

- 7- Quel est le déphasage introduit par la lame lors de sa traversée par l'onde incidente ?
- 8- Que deviennent les expressions des composantes du champ électrique à la sortie de la lame ?
- 9- Déduire la nature de l'onde transmise par la lame en justifiant votre réponse.

Exercice 1:



1° Principe de Huygens - Fresnel:

Soit Σ une surface ($\pm$ transparente) éclairée par une source S

- * Tout élément de surface dS_P de Σ centrée sur le point P , se comporte comme une source (secondaire) qui réémet la lumière dans toutes les directions.
- * L'amplitude de l'onde émise (diffractée) par dS_P est proportionnelle à dS_P et à l'amplitude de l'onde incidente en P .
- * La phase de l'onde émise par dS_P est la même que la phase de l'onde incidente en P .

2°

$$d\vec{E} = C A_0 dS_P e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}} \quad (\theta \text{ est prise comme origines des phase})$$

$\vec{u}_i$: vecteur unitaire de l'onde incidente.

$\vec{u}$: vecteur unitaire de la direction de diffraction.

3° Le trou circulaire (T) (surface diffractants)

admet l'axe Oz comme axe de symétrie de révolution (c.a.d que toute rotation autour de Oz laisse le système invariant) $\Rightarrow$ Toutes les direction de diffraction qui sont avec Oz le même angle θ sont équivalente (c.a.d dévient le même état lumineux sur l'écran).

4° voir schéma :

$$\vec{u}_i \perp xoy \Rightarrow \vec{u}_i \perp \vec{OP} \quad \forall P \in (T)$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{OP} = 0$$

$$\vec{u}_i = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\vec{E} &= CA_0 dx dy e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u}_i \cdot \vec{OP}} \\ &= CA_0 dx dy e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta} \end{aligned}$$

L'Amplitude totale de l'onde diffractée dans la direction $\vec{u}_i$ est

$$\vec{E} = CA_0 \iint_{(T)} dx dy e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta}$$

$$\vec{E} = CA_0 \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta}$$

$$= CA_0 \int_{-R}^R e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta} 2\sqrt{R^2-x^2} dx$$

$$= 2CA_0 \left[\underbrace{\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta\right) dx}_{f_2(x)} - j \underbrace{\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta\right) dx}_{f_1(x)} \right]$$

$$f_1(x) \text{ est impaire} \Rightarrow \int_{-R}^R f_1(x) dx = 0$$

$$f_2(x) \text{ est paire} \Rightarrow \int_{-R}^R f_2(x) dx = 2 \int_0^R f_2(x) dx$$

$$\vec{E} = 4CA_0 \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta\right) dx$$

$$5^\circ \vec{E} = 4CA_0 \int_0^R R \sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta\right) dx$$

$$\text{on pose } v = \frac{x}{R} \Rightarrow x = Rv \Rightarrow dx = Rdv$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow v=0 \\ x=R \Rightarrow v=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 4CA_0 R^2 \int_0^1 \sqrt{1-v^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} Rv \sin \theta\right) dv$$

$$\text{On pose } m = m(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda_0} R \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \bar{E} &= 4 A_0 C R^2 \int_0^1 \sqrt{1-v^2} \cos(mv) dv \\
&= 4 C A_0 R^2 \frac{\pi}{2m} \times \underbrace{\frac{2m}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-v^2} \cos(mv) dv}_{B_1(m(\theta))} \\
&= C A_0 R^2 \frac{\pi}{m} \left[2 \times \frac{2m}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-v^2} \cos(mv) dv \right] \\
&= C A_0 R^2 \pi \frac{2 B_1(m(\theta))}{m}
\end{aligned}$$

6° $\bar{E}$ a la forme $\bar{E} = E_0 \frac{2 B_1(m)}{m}$

avec $E_0 = C A_0 R^2 \pi$

$$m = \frac{2\pi}{\lambda_0} R \sin \theta$$

7° Intensité de l'onde diffractée dans la direction θ

$$I = \bar{E} \bar{E}^* = \bar{E}^2 = 4 E_0^2 \frac{B_1^2(m)}{m^2}$$

8° Le 1^{er} minimum de diffraction (le 1^{er} anneau sombre) est obtenu pour la 1^{er} valeur de m_1 qui annule $B_1(m)$

$$\Rightarrow m_1 = 3,83$$

Ce minimum a lieu pour $\theta_1 = 0,5^\circ$

$$m_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} R \sin \theta_1 \Rightarrow 2R = d = \frac{m_1 \lambda_0}{\pi \sin \theta_1}$$

$$d = \frac{0,6 \times 3,83}{3,14 \times 2,726 \cdot 10^{-3}} = 83,86 \mu m = 83,86 \cdot 10^{-3} mm$$

$$d = 0,084 mm$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

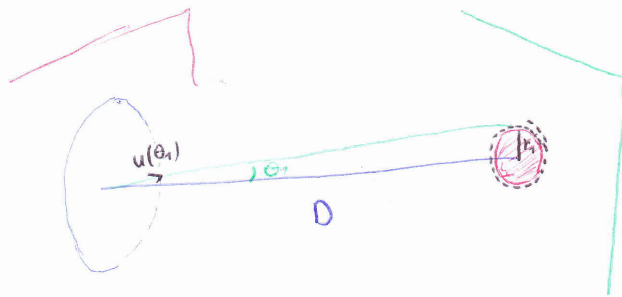
9/

$$\tan(\theta_1) = \frac{n}{D}$$

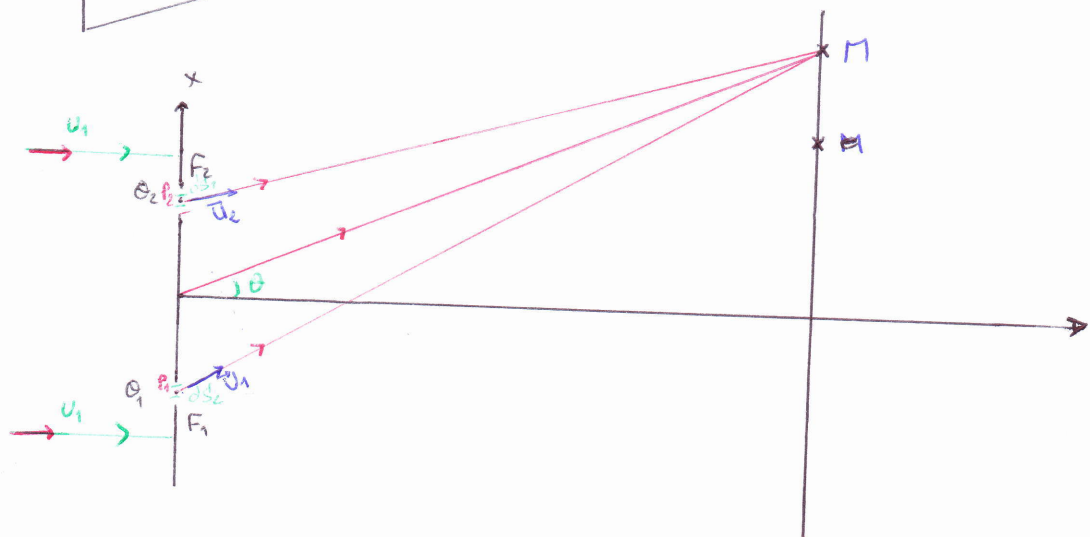
$$\Rightarrow n = D \tan(\theta_1)$$

$$\Rightarrow d = 2D \tan(\theta_1)$$

$$d = 4 \times \tan(0.5^\circ) = 0.0349 \text{ m} \approx 3.5 \text{ cm}$$



Exercise 2:



b) a $\Rightarrow$ la diffraction se fait uniquement suivant Ox

$\vec{u}$: direction de diffraction est située dans des plans $\parallel xOz$

$$d\vec{E}_1 = CA_0 dx_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_1 - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}_1}$$

$$= CA_0 dx_1 dy_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u}_1 \cdot \vec{OP}_1}$$

$$d\vec{E}_2 = CA_0 dx_2 dy_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u}_2 \cdot \vec{OP}_2}$$

$$d\vec{E}_1 = CA_0 dx_1 dy_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \vec{OP}_1}$$

$$d\vec{E}_2 = CA_0 dx_2 dy_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \vec{OP}_2}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{E}_1 = CA_0 dx_1 dy_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x_1 \sin \theta}$$

$$d\vec{E}_2 = CA_0 dx_2 dy_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x_2 \sin \theta}$$

$$\vec{E} = \iint (d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2)$$

$$= \iint_{F_1} d\vec{E}_1 + \iint_{F_2} d\vec{E}_2$$

$$d\vec{E}_1 = CA_0 e^{j\Phi_0(M)} dx_1 dy_1 e^{-j(\vec{u}_1 - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}_1}$$

$$\vec{u}_i \perp Oxy$$

$$= CA_0 e^{j\Phi_0(M)} dx_1 dy_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x_1 \sin \theta}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_i \perp OP$$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{OP}_1 = 0$$

A_0 : Amplitude de l'onde incident en P_1

$$d \ll D$$

$$\vec{u}_i \approx \vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a de même

$$d\vec{E}_2 = CA_0 e^{j\Phi_0(M)} dx_2 dy_2 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_2 - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}_2}$$

$$\vec{u}_i \perp \vec{OP}_2 \Rightarrow \vec{u}_i \cdot \vec{OP} = 0$$

$$\vec{u}_2 \approx \vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

(on peut poser $\Phi_0(M) = 0$)

L'Amplitude résultante en M est :

$$E = \int_{F_1} d\vec{E}_1 + \int_{F_2} d\vec{E}_2$$

$$= CA_0 \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy_1 \int_{\frac{-d-a}{2}}^{\frac{-d+a}{2}} dx_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \sin \theta} + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy_2 \int_{\frac{d-a}{2}}^{\frac{d+a}{2}} dx_2 e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} x_2 \sin \theta} \right]$$

$$= CA_0 b \frac{1}{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta} \left[e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{-d+a}{2} \right) \sin \theta} - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{-d-a}{2} \right) \sin \theta} + e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{d+a}{2} \right) \sin \theta} - e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{d-a}{2} \right) \sin \theta} \right]$$

$$= \frac{CA_0 b}{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta} \left[2j \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{d-a}{2} \right) \sin \theta \right) - 2j \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{d+a}{2} \right) \sin \theta \right) \right]$$

$$= \frac{CA_0 b}{\frac{\pi}{\lambda_0} \sin \theta} \left(\sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{d+a}{2} \right) \sin \theta \right) - \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{d-a}{2} \right) \sin \theta \right) \right)$$

$$\sin p - \sin q = \sin(a+b) - \sin(a-b)$$

$$= \sin a \cos b + \sin b \cos a - (\sin a \cos b - \sin b \cos a)$$

$$= 2 \sin b \cos a = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$= 2 \sin \left(\frac{a}{2} \times \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{d}{2} \sin \theta \right)$$

$$E = \frac{2CA_0 b}{\frac{\pi}{\lambda_0} \sin \theta} \sin \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_0} \right) \cos \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda_0} \right)$$

$$= 2CA_0 b a \underbrace{\frac{\sin \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_0} \right)}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_0}}}_{\text{terme de diffraction}} \underbrace{\cos \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda_0} \right)}_{\text{terme d'interférence}}$$

L'intensité de l'onde résultante en M :

$$I(M) = \underbrace{4(CA_0 ab)^2}_{I_0} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_0} \right)}{\left(\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda_0} \right)^2} \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda_0} \right)$$

2^{eme} méthode.

Les deux fentes sont identiques et éclairées par une onde plan.

$\Rightarrow$ Les ondes diffractées dans la direction θ par ces deux fentes ont des amplitudes de même module mais présentent un déphasage $\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$

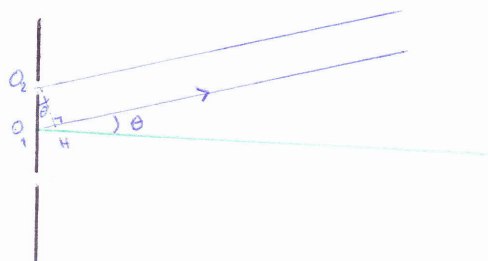
$$F_1 \longrightarrow \bar{E}_1$$

$$F_2 \longrightarrow \bar{E}_2 \quad \text{avec} \quad |\bar{E}_1| = |\bar{E}_2|$$

On choisit comme origine des phases la phase de l'onde diffractée par F_1

$$\Rightarrow \bar{E}_1 = E_1 e^{j0} = E_1$$

$$\bar{E}_2 = E_1 e^{j\phi}$$



$$\delta = O_1 H = d \sin \theta$$

$$\bar{E}_2 = E_1 e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta}$$

L'amplitude de l'onde résultante en M est

$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = E_1 \left(1 + e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta} \right)$$

L'intensité en M est

$$I = E_1^2 \left(1 + e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta} \right) \left(1 + e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta} \right)$$

$$= 2E_1^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi d}{\lambda_0} \sin \theta \right) \right)$$

$$= 4E_1^2 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda_0} \sin \theta \right)$$

E_1 : amplitude de l'onde diffractée par F_1 dans la direction θ .

$$dE_1 = CA_0 ds_1 e^{j\Phi_0(M)} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_1 - \vec{u}_i) \cdot \vec{O_1 P_1}}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$dE_1 = CA_0 dx_1 dy_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x_1 \sin \theta}$$

$$O_1 P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = CA_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx_1 e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} x_1 \sin \theta}$$

$$= \frac{CA_0 b}{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta} \left(e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{a}{2}\right) \sin \theta} - e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(-\frac{a}{2}\right) \sin \theta} \right)$$

$$= \frac{CA_0 b}{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta} \times \cancel{(2j)} \left(\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta \right) \right)$$

$$= \frac{CA_0 ab}{\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta}$$

$$\Rightarrow I(\theta) = 4 (CA_0 ab)^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta \right)^2} \times \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda_0} \sin \theta \right)$$

20/ Le terme de diffraction a un max principal pour $v = \frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \theta = 0$

c.a.d pour $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

Les minimum des diffraction ~~ont~~ ont lieu pour

$$\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = k\pi \quad \text{avec } k \neq 0$$

$$\sin \theta_{\min} = \frac{k\lambda_0}{a}$$

Les max du terme d'interference ont lieu pour $\cos \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda_0} = \pm 1$

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda_0} = k'\pi \quad (k' = 0, \pm 1)$$

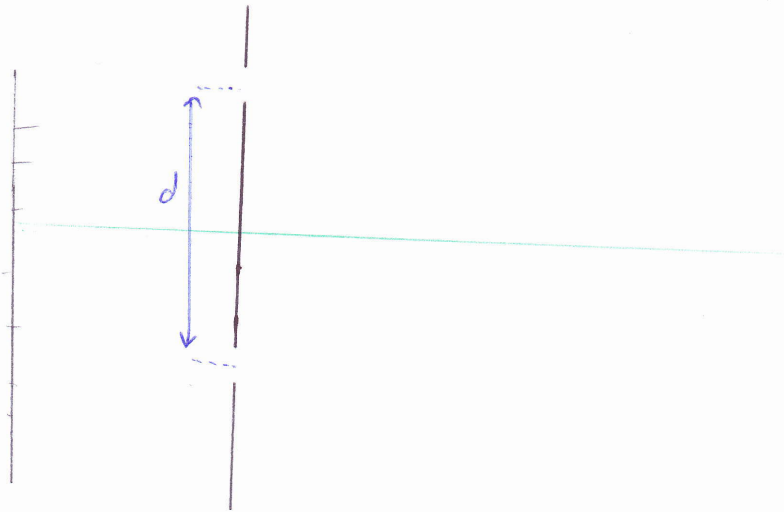
$$\sin \theta = \frac{k'\lambda_0}{d}$$

$$d > a \Rightarrow \frac{1}{d} < \frac{1}{a}$$

$$\theta_{\max \text{ interf}} < \theta_{\min \text{ Diff}}$$

$\Rightarrow$ chaque taches de diffraction

va contenir plusieurs franges brillantes d'interference.



Si d augmente on a $\sin \theta_{\text{max interf}}$ diminu

c.à.d que les franges brillantes d'interférence se rapprochent

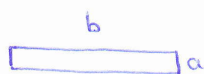
$\Rightarrow$ le nombre de franges brillantes d'interférence à l'intérieur de chaque tache de diffraction augmente

(a fixe $\Rightarrow$ les taches de diffraction conservent leur largeur)

3°/ La frange brillante d'interférence d'ordre 5 disparaît si sa position coïncide avec le 1^{er} minimum de diffraction

$$\sin \theta_{\text{max interf } 5} = \frac{5 \lambda_0}{d} = \sin \theta_{\text{min Diss } 1} = \frac{\lambda_0}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{a} = 5}$$

Exercice 3 :



distance entre 2 fentes voisines = pas du réseau

$b \gg a \Rightarrow$ la distance diffraction a lieu uniquement dans la direction Ox

Les fentes sont identiques et l'onde incidente est plane $\Rightarrow$ les ondes diffractées dans une direction θ ont des amplitudes de même module

Si $\bar{E}_1$: amplitude complexe de l'onde diffractée par F_1

$$\text{On a } |\bar{E}_1| = |\bar{E}_2| = \dots = |\bar{E}_N|$$

Si on choisit comme origine des phases la phase de $\bar{E}_1$

On aura

$$\bar{E}_1 = E_1 e^{j\varphi} = E_1$$

$$\bar{E}_2 = |\bar{E}_2| e^{j\varphi} = E_1 e^{j\varphi}$$

$$\bar{E}_3 = \bar{E}_2 e^{j\varphi} = E_1 e^{2j\varphi}$$

$\vdots$

$$\bar{E}_N = E_1 e^{(N-1)j\varphi}$$

L'Amplitude de l'onde résultant est

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \dots + \bar{E}_N \\ &= E_1 (1 + e^{j\varphi} + \dots + e^{(N-1)j\varphi}) \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

$$\bar{E} = E_1 \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}}$$

$$I(\theta) = \bar{E} \bar{E}^* = E_1^2 \frac{(1 - e^{jN\varphi})(1 - e^{-jN\varphi})}{(1 - e^{j\varphi})(1 - e^{-j\varphi})}$$

$$= E_1^2 \frac{1 - \cos N\varphi}{1 - \cos \varphi}$$

$$= E_1^2 \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

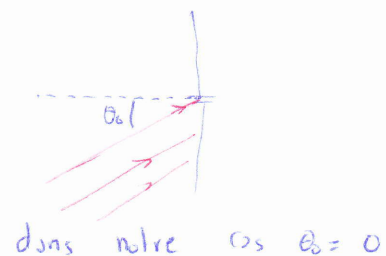
E_1^2 intensité diffractée par la fente F_1 dans la direction θ

(car généralement $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u} - \vec{u}_1) \cdot \vec{O_1 O_2}$)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \\ 0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{O_1 O_2} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) d$$



$$E_1^2 = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2}$$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2} \times \frac{\sin^2 \left(\frac{N \pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

$$= I_0 \cdot F_D(\theta) \cdot F_I(\theta)$$

$F_D = f^D$: de diffraction.

$F_I = f^I$ d'interférence.

Une tâche brillante de diffraction correspond à un maximum d'interférence (max de $F_I(\theta)$)

Ce max est donné obtenu pour

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = k\pi \quad \text{Ce qui donne la formule des réseaux}$$

$$\boxed{d \sin \theta = k\lambda} \quad k \in \mathbb{Z}$$

avec d : pas du réseau et k ordre de la tâche de diffraction

Pour avoir un max d'interférence il faut que les ondes qui interfèrent soient en phase

$$\varphi = 2k\pi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

$$d \sin \theta = k\lambda$$

Calcul du max de $F_I(\theta)$

$$F_I \left(\frac{\pi d}{\lambda_0} \sin \theta \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\pi d}{\lambda_0} \sin \theta = k\pi$$

$$M_{\max} = \frac{\sin^2 Nk\pi}{\sin^2 k\pi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin^2 (Nk(\pi - \epsilon))}{\sin^2 (k(\pi - \epsilon))}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin^2 (Nk\pi - Nk\epsilon)}{\sin^2 (k\pi - k\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sin Nk\pi \cos (Nk\epsilon) - \sin Nk\epsilon \cos (Nk\pi)}{\sin k\pi \cos k\epsilon - \sin k\epsilon \cos (k\pi)} \right)^2$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{(-1)^{N\epsilon} \sin N\epsilon}{(-1)^R \sin \epsilon} \right)^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{N\epsilon}{\epsilon} \right)^2 = N^2$$

L'intensité de la tache de diffraction d'ordre ~~pa~~ d'ordre par le réseau est

$$I(\theta_k) = I_0 N^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \times \frac{k\lambda}{d} \right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \times \frac{k\lambda}{d} \right)^2} = N^2 I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{k\pi a}{d} \right)}{\left(\frac{k\pi a}{d} \right)^2}$$

I diminue quand k augmente.

Les minimums de diffraction :

$$F_p(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = k\pi$$

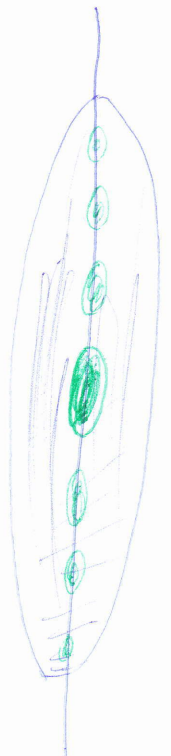
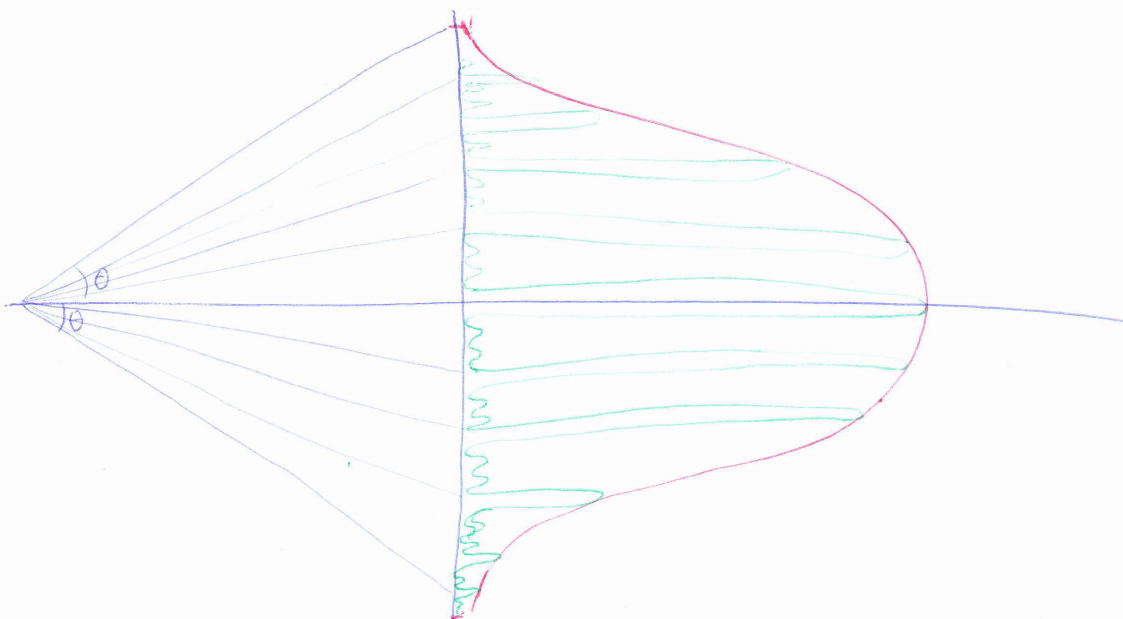
$$\sin \theta_{k \min D} = \frac{k\lambda}{a}$$

Les Max d'interférence sont obtenus pour

$$\sin \theta_{k \max \text{ Inte}} = \frac{k\lambda}{d}$$

$$d \gg a \Rightarrow \frac{1}{d} \ll \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{\lambda}{d} \ll \frac{\lambda}{a}$$

$$\Rightarrow \sin \theta_{k \max \text{ Inte}} \ll \sin \theta_{k \min D}$$



5° Les positions des taches (brillantes) de diffraction par réseau (max d'interférence) sont données par la formule des réseaux

$$d \sin \theta_k = k\lambda$$

$$\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{d} = \frac{x_k}{\sqrt{D^2 + x_k^2}}$$

$$\frac{x_k^2}{D^2 + x_k^2} = \left(\frac{k\lambda}{d} \right)^2$$

$$x_k^2 \left(1 - \left(\frac{k\lambda}{d} \right)^2 \right) = \frac{k^2 \lambda^2 D^2}{d^2}$$

$$x_k = \frac{k \left(\frac{\lambda D}{d} \right)}{\sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{d^2}}}$$

6° Tache centrale d'ordre 0 correspond à $k=0 \Rightarrow x_0=0$

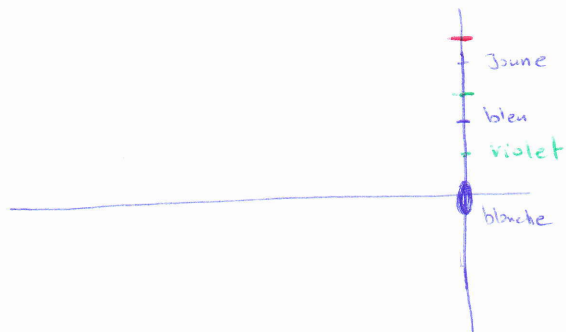
Indépendante de λ

Toutes les longueurs d'onde sont présentes dans cette tache
 $\Rightarrow$ la tache est blanche.

$$7° \quad x_{11} = \frac{1 \times \lambda_1 D / d}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{d^2}}}$$

$$= \frac{0,4 \cdot 10^{-3} \times \frac{2 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-3}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} \right)^2}} = \frac{160}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{50} \right)^2}} = 160,003 \text{ mm} \approx 16 \text{ cm}$$

$$8° \quad x_{12} = \frac{\lambda_2 D / d}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_2^2}{d^2}}} = \frac{0,8 \cdot 10^{-3} \times 400}{\sqrt{1 - \left(\frac{8}{50} \right)^2}} = 324,17 \text{ mm} = 32,42 \text{ cm}$$



Le réseau sépare les longueurs d'onde : c'est le phénomène de dispersion

9° largeur de la tache d'ordre 1

$$\Delta x_1 = x_{12} - x_{11} = 32,4 - 16,1 = 16,3 \text{ cm}$$

10° L'ordre maximum correspondant à $\lambda_0 = 0,6$

$$d \sin \theta_k = k \lambda_0$$

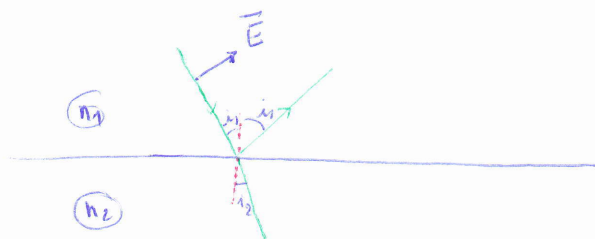
$$\sin \theta_k = \frac{\lambda_0 k}{d}$$

$$|\sin \theta_k| = |k| \frac{\lambda_0}{d} \leq 1$$

$$|k| < \frac{d}{\lambda_0} = \frac{5}{0,6} = 8,3$$

$$|k| \leq 8,3 \quad \text{~~11111111~~ } |k| = 8$$

Exercice 4,



$$r = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}$$

$$r = 0 \quad \text{pour } i = i_B$$

$$\text{On a } n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sin i_2 \cos i_2 - \sin i_1 \cos i_1}{\sin i_2 \cos i_2 + \sin i_1 \cos i_1} = \frac{\frac{1}{2} (\sin 2i_2 - \sin 2i_1)}{\frac{1}{2} (\sin 2i_2 + \sin 2i_1)}$$

$$= \frac{\sin(i_2 - i_1) \cos(i_2 + i_1)}{\sin(i_2 + i_1) \cos(i_2 - i_1)} = \frac{\tan(i_2 - i_1)}{\tan(i_2 + i_1)}$$

$$\sin a - \sin b = \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

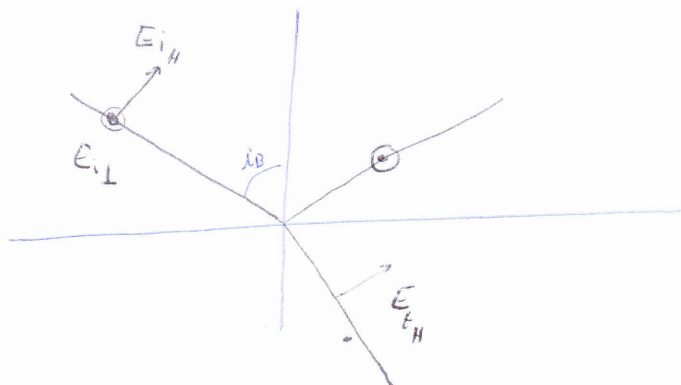
$$r = 0 \quad \text{Si } \begin{cases} i_1 = i_2 & \text{impossible si } n_1 \neq n_2 \\ \tan(i_1 + i_2) = \infty & \text{c.à.d.} \end{cases}$$

$$i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$i_2 = i_B = \frac{\pi}{2} - i_1$$

R_d :

Si la lumière est naturelle



$\Rightarrow$ La lumière réfléchie sera polarisée
 $\perp$ au plan d'incidence.

3°

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Pour $i_1 = i_B$ on a

$$n_1 \sin i_B = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - i_B \right)$$

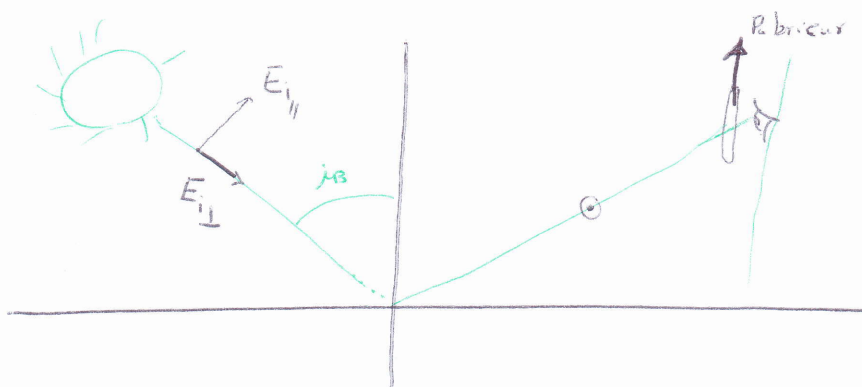
$$\frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \frac{n_2}{n_1} = \tan(i_B)$$

4°

A.N: $n_1 = 1$, $n_2 = 1,33$

$$i_B = 53,66^\circ$$

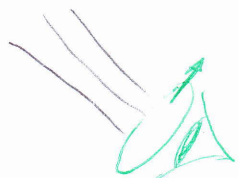
5°



Les reflets ne deviennent important que pour des angles d'incidence suffisamment grande ($i \approx i_B$).

La lumière solaire étant naturelle la lumière réfléchie sera polarisée perpendiculairement au plan d'incidence (pour $i = i_B$)

⇒ elle sera polarisée horizontalement. Pour minimiser l'intensité de la lumière reçu par l'œil il faut orienter la direction de polarisation des lunettes verticalement.



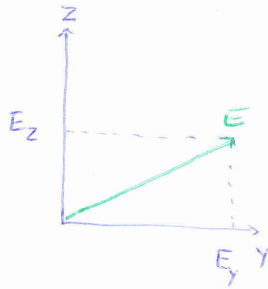
La lumière solaire étant naturelle, on aura statistiquement 50% de rayons dont $\vec{E} \parallel$ direction de polarisation de la ~~lunette~~ lunette et 50% de rayon dont $\vec{E} \perp$ direction de polarisation de la lunette.

$\Rightarrow$ il y aura près de 50% de lumière qui vont traverser les lunettes et arriver à l'œil

Conclusion :

On ne doit pas regarder directement le soleil même en portant des lunettes polarisantes.

Exercice 5 :



1°/

$$\begin{cases} E_y = E_1 \sin(\omega t) \\ E_z = E_2 \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{E_y}{E_1} &= \sin \omega t \\ \frac{E_z}{E_2} &= \cos \omega t \end{aligned}$$

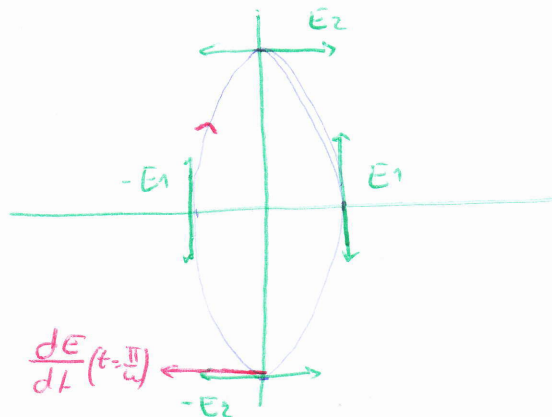
$$\left(\frac{E_y}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{Il s'agit d'une ellipse d'axe } O_y \text{ et } O_z$$

(le grand axe est E_z)

Cette ellipse représente la trajectoire de l'extrémité du champ.

L'onde considérée est polarisée elliptiquement.

2°/



$$3^\circ \quad E(t = \frac{\pi}{\omega}) = \begin{cases} E_y(\frac{\pi}{\omega}) = E_1 \sin(\omega \frac{\pi}{\omega}) = 0 \\ E_z(\frac{\pi}{\omega}) = E_2 \cos(\omega \frac{\pi}{\omega}) = -E_2 \end{cases}$$

L'extrémité du champ est en A

$$4^\circ \quad \frac{d\vec{E}}{dt} = \begin{cases} \frac{dE_y}{dt} = \omega E_1 \cos(\omega t) \\ \frac{dE_z}{dt} = -\omega E_2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{E}}{dt}(t = \frac{\pi}{\omega}) = \begin{cases} \omega E_1 \cos(\omega \times \frac{\pi}{\omega}) = -\omega E_1 \\ -\omega E_2 \sin(\omega \times \frac{\pi}{\omega}) = 0 \end{cases}$$

Le champ tourne dans le sens horaire (sens indirect).

5° Il s'agit d'une lumière polarisée droite car le champ $\vec{E}$ tourne dans le sens horaire.

$$6^\circ \quad \begin{aligned} E_y &= E_1 \sin(\omega t) \\ E_z &= E_2 \cos(\omega t) = E_2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= E_2 \sin(\omega t - \varphi) = E_2 \sin(\omega t + (-\varphi)) \\ E_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \omega t) &= -E_2 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}), \\ \Rightarrow \frac{\pi}{2} &= -\varphi \quad \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$\sin \varphi = -1 < 0 \Rightarrow$ la polarisation est elliptique droite.

$$7^\circ \quad \varphi_L = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_L \quad \delta_L : \text{déphasage introduit par la lame}$$

Lame quart d'onde $\Rightarrow \delta_L = \frac{\lambda}{4}$ déferance de marche entre les deux composantes E_y et E_z (// ou ligne neutre) est $\delta_L = \frac{\lambda}{4}$

$$\varphi_L = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Si on prend comme origine des phase la phase de E_y on aura
à la sortie de la lame :

$$E_y = E_1 \sin(\omega t)$$

$$E_z = E_2 \cos(\omega t - \varphi_L)$$

$$= E_2 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi_L)$$

$$= E_2 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{E_z = E_2 \sin(\omega t)}$$

$$\frac{E_z}{E_y} = \frac{E_2}{E_1} = \text{cte} \Rightarrow E_z = \text{cte } E_y$$

il s'agit d'une polarisation rectiligne .